Etude sur les réseaux de Steiner:

description d'un algorithme approchant la résolution du problème de Steiner généralisé à n points d'un espace métrique.

Plan d'étude.

1. Résumé.

Les problèmes non-polynomiaux (N-P) sont une classe de problèmes qui motive beaucoup l'activité des chercheurs, tant les difficultés à les résoudre sont nombreuses. L'un d'entre eux est particulièrement intéressant, car il vise à connecter un certain nombre de points, nombre assez grand, pour former un réseau de longueur minimale. Ces réseaux sont appelés réseaux de Steiner et ont de multiples applications à chaque fois qu'il est question d'optimiser des processus industriels. La recherche d'une solution à ce problème, commencée en mars 1989 suite à la lecture d'un article dans une revue scientifique, a abouti en juin 1997 avec la mise en œuvre d'un algorithme de résolution rapide du problème de Steiner. L'approche qui est faite de ce problème est entièrement basée sur des définitions très simples de topologie qui étonneront pourtant par la complexité des réseaux créés. Son but était bien sûr d'obtenir des réseaux de Steiner comportant un nombre important de points à connecter au terme d'un temps de calcul acceptable. J'ai donc abordé ce problème sous un aspect strictement topologique à partir de notions simples mais en les faisant agir de façon interactive au cours des calculs. Même si l'accumulation de ces définitions donne à cet exposé de recherche une forme involontaire de cours magistral, avec tout le côté rébarbatif que cela peut comporter, elles m'ont semblé nécessaires pour la bonne compréhension de l'algorithme. La conclusion en elle-même peut donner une idée de l'éventail des applications qu'un travail sur les problèmes N-P complets peut avoir, en gardant toujours à l'esprit que l'objectif de ce

document réside dans sa diffusion au cas où cette approche serait réellement novatrice relativement au problème de Steiner et aussi à confronter cette approche à d'autres approches existant déjà.

Mots-clés: réseau, topologie, groupes, connexité, voisinage, rétro-propagation.

2 <u>Les objets topologiques fondamentaux</u>

2.1 <u>Relation de connexité.</u>

On définit sur l'ensemble des points de G d'un espace vectoriel de dimension n, noté V_n , la relation $\mathbb{R}$ par le lien verbal "… est relié à …", avec comme convention $\forall p(x_1, x_2, ..., x_n)$, $p \in G$, $p \not\mathbb{R} p$.

De même, on écrira un groupe composé de k points, le groupe $G_k = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ formé des k points vérifiant cette relation.

<u>Etude des propriétés de $\mathbb{R}$.</u>

=> <u>$\mathbb{R}$ réflexive ?</u>

Selon la définition précédente, on sait que:

$$\forall p, p \in G, p \not\mathbb{R} p, \text{donc } \mathbb{R} \text{ non-réflexive.}$$

=> <u>$\mathbb{R}$ symétrique ?</u>

$$\forall p_1, p_1 \in G, \forall p_2, p_2 \in G, p_1 \ \mathbb{R}\ p_2 \text{ et } p_2 \ \mathbb{R}\ p_1,$$
$$\text{donc } p_1 \ \mathbb{R}\ p_2 \Rightarrow p_2 \ \mathbb{R}\ p_1 \text{ et } \mathbb{R} \text{ symétrique.}$$

=> <u>$\mathbb{R}$ transitive ?</u>

$$\forall p_1, p_1 \in G, \forall p_2, p_2 \in G \Rightarrow p_1 \ \mathbb{R}\ p_2$$
$$\forall p_1, p_1 \in G, \forall p_3, p_3 \in G \Rightarrow p_1 \ \mathbb{R}\ p_3$$
$$\forall p_2, p_2 \in G, \forall p_3, p_3 \in G \Rightarrow p_2 \ \mathbb{R}\ p_3$$

donc

$$(p_1 \ \mathbb{R}\ p_2) \text{ et } (p_2 \ \mathbb{R}\ p_3) \Rightarrow p_1 \ \mathbb{R}\ p_3 \text{ et } \mathbb{R} \text{ transitive.}$$

$\mathbb{R}$ est non-réflexive, symétrique et transitive. La non-réflexivité ne fait pas de $\mathbb{R}$ une relation d'équivalence.

=> $\mathbb{R}$ antisymétrique

$\forall p_1, p_1 \in G, \forall p_2, p_2 \in G \Rightarrow p_1 \ \mathbb{R} \ p_2$
$\forall p_2, p_2 \in G, \forall p_1, p_1 \in G \Rightarrow p_2 \ \mathbb{R} \ p_1$
Hypothèse : Il existe un point p_3 tel que $p_3 = p_1$ ou $p_3 = p_2$.
Nous pouvons écrire que :
Si $p_3 = p_1$ ou $p_3 = p_2 \Rightarrow p_3 \in G$.
De plus, $(p_1 \ \mathbb{R} \ p_2)$ et $(p_2 \ \mathbb{R} \ p_3) \Rightarrow p_1 \ \mathbb{R} \ p_3$.
$p_1 \ \mathbb{R} \ p_3 \Rightarrow p_3 \neq p_1$ (non - réflexivité)
Il ne reste plus qu'une possibilité : $p_3 = p_2$?
On peut écrire par définition que :

$$\forall p_1, p_1 \in G, \forall p_2, p_2 \in G, p_1 \ \mathbb{R} \ p_2 \text{ et } p_2 \ \mathbb{R} \ p_1 \Rightarrow p_1 \neq p_2.$$

Donc :
Si $p_3 = p_2$ et que $p_2 \neq p_1 \Rightarrow p_3 \neq p_1$.
L'hypothèse de départ n'est pas validée et la relation $\mathbb{R}$ n'est pas antisymétrique.

2.2 Groupe de Steiner:

Soit $G_k = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$, k points d'un espace E_n. On dira que G_k est un groupe de Steiner si la relation $\mathbb{R}$ "… est relié à …" définit une relation non-réflexive, symétrique, transitive et non-antisymétrique pour chaque point de G_k.
La relation $\mathbb{R}$ est appelée relation de connexité pour les points de G_k.

a) Ordre d'un groupe.

L'ordre d'un groupe de Steiner G_k est égal au cardinal de l'ensemble $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$ des k points du groupe G, noté Ord(G_k), avec k= Ord(G_k) et Ord(G_k)>1.

Hypothèse: soit un groupe $G_2 = \{p_1, p_2\}$ avec p1=p2.
La définition de la relation de connexité dans un groupe de Steiner impose que:

$$\forall p, p \in G, p \not\mathbb{R} p$$

On peut en déduire que $p_1 \neq p_2$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Le cardinal de l'ensemble des points du groupe G est toujours strictement supérieur à 1 noté Ord(G_k)>1.

b) Groupe simple:

Un groupe de Steiner simple est un groupe dont l'ordre est égal à 2.

$$\forall G_k, G_k \text{ groupe simple} \Rightarrow \mathrm{Ord}(G_k) = 2.$$

Un groupe simple est aussi appelé groupe-segment.

c) Groupe complexe:

Un groupe de Steiner complexe est un groupe dont l'ordre est strictement supérieur à 2.

$$\forall G_k, G_k \text{ groupe complexe} \Rightarrow \mathrm{Ord}(G_k) > 2.$$

d) <u>Points-frontière d'un groupe:</u>

Soit un groupe $G_k = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$, formé de k points de l'espace vectoriel de dimension n, noté V_n. L'ensemble des points-frontières de G_k, noté $F_h(G_k)$ est formé de h points appartenant à l'ensemble $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$, et qui sous-tendent l'enveloppe du sous-espace U de E recouvert par G_k.

<u>Conséquences:</u>

a) $F_h \subset G_k \Rightarrow F_h * G_k \neq \{\}$
b) $F_h \subset G_k \Rightarrow h \leq k$
c) $\mathrm{Ord}(G_k) \geq 2 \Rightarrow \mathrm{Ord}(F_h) \geq 2$

e) <u>Distance métrique:</u>

Soient deux points quelconques $p_u = (x_{(p_u,1)}, x_{(p_u,2)}, ..., x_{(p_u,n)})$ et $p_v = (x_{(p_v,1)}, x_{(p_v,2)}, ..., x_{(p_v,n)})$ appartenant à l'espace vectoriel V_n. La distance séparant les points p_u et p_v est notée $d(p_u, p_v)$ et est calculée selon l'expression suivante:

$$d(p_u, p_v) = \sum_{i=1, j=1}^{n,n} \sqrt{g_{(i,j)}(x_{(p_u,i)} - x_{(p_v,1)})}$$

avec $g_{(i,j)} = 1$ si i=j et $g_{(i,j)} = 0$ si $i \neq j$.

f) <u>Condition de l'existence d'un point de Steiner:</u>

Soient trois points quelconques $p_u = (x_{(p_u,1)}, x_{(p_u,2)}, ..., x_{(p_u,n)})$, $p_v = (x_{(p_v,1)}, x_{(p_v,2)}, ..., x_{(p_v,n)})$ et $p_w = (x_{(p_w,1)}, x_{(p_w,2)}, ..., x_{(p_w,n)})$, appartenant à l'espace vectoriel V_n. Ces trois points peuvent également appartenir à un groupe de Steiner G_3 d'ordre 3 vérifiant la relation de connexité $\mathbb{R}$ tel que $G_3 = \{p_1, p_2, p_3\}$ si $\forall k_1 \in \mathbb{R}, \forall k_2 \in \mathbb{R}, \overrightarrow{p_u p_v} \neq k_1 . \overrightarrow{p_u p_w}$ et $\overrightarrow{p_u p_w} \neq k_2 . \overrightarrow{p_v p_w}$.

p_1, p_2 et p_3 ne sont pas alignés.

g) Définition:

Soient trois points quelconques $p_u = (x_{(p_u,1)}, x_{(p_u,2)}, \ldots, x_{(p_u,n)})$,
$p_v = (x_{(p_v,1)}, x_{(p_v,2)}, \ldots, x_{(p_v,n)})$ et $p_w = (x_{(p_w,1)}, x_{(p_w,2)}, \ldots, x_{(p_w,n)})$, appartenant à l'espace vectoriel V_n. Ces trois points pourront appartenir un groupe de Steiner G_3 d'ordre 3 vérifiant la relation de connexité $\mathbb{R}$ tel que $G_3 = \{p_u, p_v, p_w\}$ si:

$$\exists s \in V_n / s = (x_{(p_s,1)}, x_{(p_s,2)}, \ldots, x_{(p_s,n)})$$

et

$$\sum_{i=1,j=1}^{n,n} \left(\frac{\partial(d(s,p_u))}{\partial(x_{(s,i)}, x_{p_{(u,j)}})} + \frac{\partial(d(s,p_v))}{\partial(x_{(s,i)}, x_{p_{(v,j)}})} + \frac{\partial(d(s,p_w))}{\partial(x_{(s,i)}, x_{p_{(w,j)}})}\right) = 0$$

Le point s correspond à un lieu de l'espace vectoriel V_n tel que:
$\forall p_x, p_x \in V_n, d(s,p_u) + d(s,p_v) + d(s,p_w) = \min(d(p_x,p_u) + d(p_x,p_v) + d(p_x,p_w))$

Le point s est considéré comme un minimum absolu pour le groupe G_3 et est nommé nœud ou point de Steiner pour ce groupe.

h) Arbre de Steiner: arbre, arbre simple:

Arbre.

Soit un groupe $G_k = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ de k points appartenant à l'espace vectoriel V_n. Il existe pour ce groupe un ensemble de points associés S_{k-2} tel que G_k muni de S_{k-2} forment un arbre de Steiner, noté $\mathcal{A}(G_k, S_{k-2})$.

Arbre simple:

Un arbre de la forme $\mathcal{A}(G_k, S_{k-2})$ avec k=2 forme un arbre simple. S_{k-2} est alors égal à l'ensemble vide ($S_0 = \{\}$).

i) Arbre complexe:

Un arbre de la forme $\mathcal{A}(G_k, S_{k-2})$ avec k>2 forme un arbre complexe.

2.4) Opérations sur les groupes de Steiner.

a) Produit de deux groupes.

Soient $G_k = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ et $G_m = \{p'_1, p'_2, \ldots, p'_m\}$ respectivement de k et m points de l'espace vectoriel V_n. Le produit de G_k et de G_m est égal au singleton $\{p_x\}$ tel que

$p_x \in G_k \cap G_m$ et est noté $G_k * G_m$. L'opération produit réalise donc l'intersection des deux groupes.

b) Groupes adjacents, groupes disjoints, point-pivot.

Lorsque $G_k * G_m \neq \emptyset$, les groupes G_k et G_m sont appelés groupes adjacents ou connexes. Si $G_k * G_m = \emptyset$, ces groupes sont disjoints.

i) cas où $G_k * G_m = \{p_x\}$ $\quad (Card(G_k * G_m) = 1)$

Les groupes G_k et G_m sont strictement connexes (pas de cycle) et ils forment une solution possible pour un réseau de longueur minimale. p_x est alors appelé point-pivot des groupes G_k et G_m.

ii) cas où $G_k * G_m = \{p_1, p_2, ..., p_x\}$ $\quad (Card(G_k * G_m) > 1)$

Les groupes G_k et G_m sont dits fortement connexes. Des cycles sont présents dans la partie du réseau formé par G_k et G_m. Ces groupes ne sont pas des solutions à retenir pour l'obtention d'un réseau de longueur minimale.

Propriétés:

&) Associativité:

Soient trois groupes $G_i, G_j, G_k, G_i * (G_j * G_k) = (G_i * G_j) * G_k$

$(G_j * G_k) \neq \{\} \Rightarrow \exists\, p \,/\, p \in G_j$ et $p \in G_k$ et $G_i * (G_j * G_k) = G_i * \{p\}$.

Si Si $G_i * \{p\} \neq \{\} \Rightarrow p \in G_{k.}$

$\Rightarrow p \in G_i, p \in G_j$ et $p \in G_k$. (1)

D'autre part:

$(G_i * G_j) \neq \{\} \Rightarrow \exists\, p \,/\, p \in G_i$ et $p \in G_j$.

et $(G_i * G_j) * G_k = \{p\} * G_k$.

Si $\{p\} * G_k \neq \{\} \Rightarrow p \in G_{k.}$

$\Rightarrow p \in G_i, p \in G_j$ et $p \in G_k$. (2)

Les résultats (1) et (2) sont identiques quelque soit p et * est associative.

&&) commutativité:

Soient deux groupes G_i et G_j, $G_i * G_j = G_j * G_i$

Si $G_i * G_j \neq \{\} \Rightarrow \exists\, p,\, p \in G_i$ et $p \in G_j$. (1)

De même, si $G_j * G_i \neq \{\} \Rightarrow \exists p,\, p \in G_j$ *et* $p \in G_i$. (2)

Les résultats (1) et (2) sont identiques quelque soit p et * est commutative.

&&&) Groupe neutre:

Pour tout groupe G_k , il existe un groupe neutre e_x égal à G_k .

Démonstration:

Le groupe e_x vérifie la relation $G_k * e_x = G_k$.
On sait que:

$$G_k * G_k = G_k, \text{ car } \forall\ p,\ p \in G_k \Rightarrow p \in (G_k * G_k)$$
$$\Rightarrow e_x = G_k$$

G_k est bien un groupe neutre pour lui-même.

&&&&) Groupe symétrique:

Soit un groupe G_k , un ensemble de k points de l'espace vectoriel V_n. Il existe un groupe symétrique $G_k^{'}$ tel que $G_k * G_k^{'} = e_x$.

Démonstration:

$\forall G_k, \exists\, e_x$ tel que $e_x = G_k$.
Donc: $G_k * G_k^{'} = G_k \Rightarrow G_k^{'} = e_x$.

Le groupe G_k est ainsi à la fois son groupe neutre et son groupe symétrique pour l'opération *.

c) Egalité de deux groupes:

Soient $G_k = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ et $G_w = \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_w^{'}\}$ respectivement de k points et de w points de l'espace vectoriel V_n. G_k et G_w sont des groupes égaux si k=w et $G_k * G_w = G_k$.

d) Groupes recouvrables:

Soient $G_k = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ et $G_w = \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_w^{'}\}$ respectivement de k points et de w points de l'espace vectoriel V_n. G_k et G_w sont des groupes recouvrables si $G_k * G_w = G_{\min(k,w)}$.

e) Somme de deux groupes:

Soient $G_k = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ et $G_w = \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_w^{'}\}$ respectivement de k points et de w points de l'espace vectoriel V_n. L'opération + réalise la somme des deux groupes et est définie de la manière suivante:

$$G_k + G_w = \{p_1, p_2, ..., p_k\} \cup \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_w^{'}\} = \{p_1, p_2, ..., p_k, p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_w^{'}\}$$

En appliquant à $(G_k + G_w)$ la définition de l'ordre d'un groupe, on aura:
Ord($G_k + G_w$)=Ord(G_k)+Ord(G_w).

<u>Propriétés:</u>

&) <u>Associativité:</u>

Soient trois groupes $G_i = \{p_1, p_2, ..., p_i\}$, $G_j = \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_j^{'}\}$ et $G_k = \{p_1^{''}, p_2^{''}, ..., p_k^{''}\}$

$$G_j + G_k = \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_j^{'}, p_1^{''}, p_2^{''}, ..., p_k^{''}\}$$
et
$$\begin{aligned} G_i + (G_j + G_k) &= G_i + \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_j^{'}, p_1^{''}, p_2^{''}, ..., p_k^{''}\} \\ &= \{p_1, p_2, ..., p_i\} + \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_j^{'}, p_1^{''}, p_2^{''}, ..., p_k^{''}\} \\ &= \{p_1, p_2, ..., p_i, p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_j^{'}, p_1^{''}, p_2^{''}, ..., p_k^{''}\} \quad (1) \end{aligned}$$

De même: $G_i + G_j = \{p_1, p_2, ..., p_i, p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_j^{'}\}$
et
$$\begin{aligned} (G_i + G_j) + G_k &= \{p_1, p_2, ..., p_i, p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_j^{'}\} + G_k \\ &= \{p_1, p_2, ..., p_i, p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_j^{'}\} + \{p_1^{''}, p_2^{''}, ..., p_k^{''}\} \\ &= \{p_1, p_2, ..., p_i, p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_j^{'}, p_1^{''}, p_2^{''}, ..., p_k^{''}\} \quad (2) \end{aligned}$$

Les résultats (1) et (2) sont identiques et l'opération + est associative.

&&) <u>commutativité:</u>

Soient $G_k = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ et $G_w = \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_w^{'}\}$ respectivement de k points et de w points de l'espace vectoriel V_n. $G_k + G_w = G_w + G_k$
En effet:

$$\begin{aligned} (G_k + G_w) &= \{p_1, p_2, ..., p_k\} + \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_w^{'}\} \\ &= \{p_1, p_2, ..., p_k, p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_w^{'}\} \quad (1) \end{aligned}$$
et

$$\begin{aligned} (G_w + G_k) &= \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_w^{'}\} + \{p_1, p_2, ..., p_k\} \\ &= \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_w^{'}, p_1, p_2, ..., p_k,\} \quad (2) \end{aligned}$$

Les résultats (1) et (2) sont identiques aux positions des points près et l'opération + est bien commutative.

&&&) Groupe neutre:

Pour tout groupe $G_k = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ formé de k points de l'espace vectoriel V_n, il n'existe pas de groupe neutre e_0 tel que $G_k * e_o = G_k$
En effet, on peut écrire que:

$G_k * e_O = G_k$, en posant $e_0 = \{\}$ (groupe vide)

Mais la définition d'un groupe impose Ord(G_k)>1
Cette définition s'impose aussi à e_0, qui de ce fait n'existe pas pour l'opération +.

&&&&) Groupe symétrique:

L'existence d'un groupe symétrique étant subordonnée à celle d'un groupe neutre, qui n'existe pas pour l'opération +, il n'existe pas non plus de groupe symétrique $G_k^{'}$ tel que $G_k + G_k^{'} = e_0$

f) Somme directe de deux groupes:

Soient $G_k = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ et $G_w = \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_w^{'}\}$ respectivement de k points et de w points de l'espace vectoriel V_n. La somme directe des groupes G_k et G_w, notée $G_k \oplus G_w$ est définie de la manière suivante:

$$G_k \oplus G_w = (G_k \bigcup G_w) - (G_k \bigcap G_w) = \{p_1, p_2, ..., p_k\} + \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_w^{'}\} - (G_k \bigcap G_w)$$
$$= (G_k + G_w) - (G_k * G_w)$$

En appliquant à $G_k \oplus G_w$ la définition de l'ordre d'un groupe, on trouve:
Ord($G_k \oplus G_w$)=Ord($G_k + G_w$)-Ord($G_k * G_w$)

Remarque: on cherchera Ord($G_k \oplus G_w$)=1 dans la résolution d'un réseau de longueur minimale (cas d'une connexité stricte).

Propriétés:

Les propriétés de l'opération + sur les groupes viennent des propriétés de la somme de deux groupes, c'est à dire:

a) associativité.
b) commutativité.
c) pas de groupe neutre.
d) pas de groupe symétrique.

2.5) Connexité.

a) Connexité directe forte:

Soient deux groupes G_k et G_w non identiques et adjacents. Il existe une relation de connexité forte entre G_k et G_w si Ord($G_k * G_w$)>1.

b) Connexité large forte:

Soit un groupe G_k et un ensemble E_z de z groupes tous non identiques et adjacents tels que $E_Z = \{G'_{O_1}, G'_{O_2}, ..., G^{(z)}_{O_Z}\}$. Il existe une relation de connexité forte entre G_k et E_z si Ord($G_k * E_z$)>1.

Remarque:

On sait (définition de deux groupes adjacents) que:

$\forall G_i, G_i \in E_z$ tel que $G_k * G_i = \{p\} \Rightarrow \mathrm{Ord}(G_k * G_i) \neq 0$

Donc: $\forall \mathrm{G_x}, G_x \in E_z \Rightarrow G_k * G_x = \{p'\}$

1) $x = i \Rightarrow G_x = G_i \; et \; p = p'$ (connexité stricte: $G_k * G_i = \{p\}$)

2) $x \neq i \Rightarrow G_x \neq G_i \Rightarrow (\mathrm{G_k * G_i})=\{\mathrm{p}\}$ et $(\mathrm{G_k * G_x})=\{\mathrm{p'}\} \Rightarrow p \neq p' \Rightarrow G_k * E_z = \{p, p'\}$

D'où Ord($G_k * E_z$)>1 (connexité large forte)

c) Algorithme de connexité.

La construction d'un réseau de Steiner formé par la somme directe de plusieurs groupes passe par l'élimination des groupes de connexité large forte. Pour ce faire, il faut, connaissant G_k, relié au réseau:

a) Rechercher l'ensemble E_z des z groupes adjacents dont on soit sûr qu'ils sont strictement connexes entre eux.

b) Parcourir l'ensemble E_z en s'appuyant sur les p_{z-1} points-pivots reliant les z groupes les uns aux autres.

c) Soit l'ensemble $P_{z-1} = \{p_1, p_2, ..., p_{z-1}\}$ constitué des z-1 points-pivots. On sait (G_k relié au réseau) qu'il existe dans P_{z-1}, un point-pivot p_i tel que $G_k * E_z = \{p_i\}$ et considérons le groupe G_k comme disjoint de l'ensemble E_z.

d) Hypothèse: le groupe G_k est disjoint de E_z et appelons $P'_{z-1} = P_{z-1} - \{p_i\}$.

En effet: $P'_{z-1} = P_{z-1} - \{p_i\} \Rightarrow G_k \notin E_Z$.

Premier cas: Ord($P_{z-1} * E_z$)=0. Il n'y a pas d'autre point-pivot que p_i, donc non-connexité forte. Comme $G_k \in E_z$, il n'y a qu' une connexité directe stricte. G_k peut donc être retenu comme solution minimale possible.

Deuxième cas: Ord($P_{z-1} * E_z$)$\neq$ 0. Il y a présence de cycles dans le réseau, donc connexité large forte. G_k ne peut pas être retenu comme solution minimale possible.

L'algorithme de construction d'un réseau de Steiner ne retiendra que les groupes G_k tels que Ord($G_k * E_z$)=1 (connexité directe stricte), condition nécessaire mais pas suffisante à l'obtention d'un arbre de Steiner de longueur minimale.

2.6 Construction d'un groupe complexe.

La construction d'un groupe complexe se fait en trois étapes:

i) Détermination d'un point initial du groupe.
ii) Détermination des points voisins appartenant au voisinage restreint de ce point initial et qui peuvent lui être reliés.
iii) Considérer les deux premiers points voisins et déterminer l'existence ou non d'un point de Steiner.
iiii) Reprendre les trois étapes précédentes en considérant le dernier point voisin intégré au groupe comme nouveau point initial.

a) Détermination du point initial d'un groupe.

Soit un système de s points $p_1, p_2, ..., p_s$ de l'espace vectoriel V_n noté $\Sigma_s = \{p_1, p_2, ..., p_s)$ avec $p_x \in \sum_s$ tel que $p_x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, n vecteurs de V_n dont on aura déterminé sa distance minimale de voisinage $D_{\min}$.
A chaque point $p_x \in \sum_s$ est associé son voisinage restreint $V(p_x, D_{\min})$.
Le point initial p_i du prochain groupe à construire est tel que:

$$\exists p_i \in \Sigma_s, V(p_i, D_{\min}) = Sup(V(p_x, D_{\min}))$$

b) Voisinage d'un point:

Soit un système de s points $p_1, p_2, ..., p_s$ de l'espace vectoriel V_n noté $\sum_s = \{p_1, p_2, ..., p_s)$ avec $p_x \in \sum_s$ tel que $p_x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, n vecteurs de V_n.
Le voisinage d'un point p, noté V(p) est défini par:
$V(p) = \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_y^{'}\}$ avec $\{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_y^{'}\} \in \sum_s$ et
$d(p, p_1^{'}) < d(p, p_2^{'}) < ... < d(p, p_{y-1}^{'}) \leq d(p, p_y^{'})$

La détermination du voisinage d'un point suppose que l'on ait au préalablement calculé les coordonnées du centre géométrique du système et effectué ensuite la répartition angulaire de tous les points autour du centre géométrique.

c) Voisinage restreint:

Soit un système de s points $p_1, p_2, ..., p_s$ de l'espace vectoriel V_n noté $\sum_s = \{p_1, p_2, ..., p_s)$ avec $p_x \in \sum_s$ tel que $p_x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, n vecteurs de V_n.

Le voisinage restreint à une distance u d'un point p, noté V(p,u) est défini par:

$$\mathrm{V}(p,\mathrm{u}) = \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_y^{'}\} \text{ avec } \{p_1^{'}, p_2^{'}, ..., p_y^{'}\} \in \sum_s$$
$$\text{et} \quad d(p,p_1^{'}) < d(p,p_2^{'}) < ... < d(p,p_y^{'}) \le \mathrm{u}$$

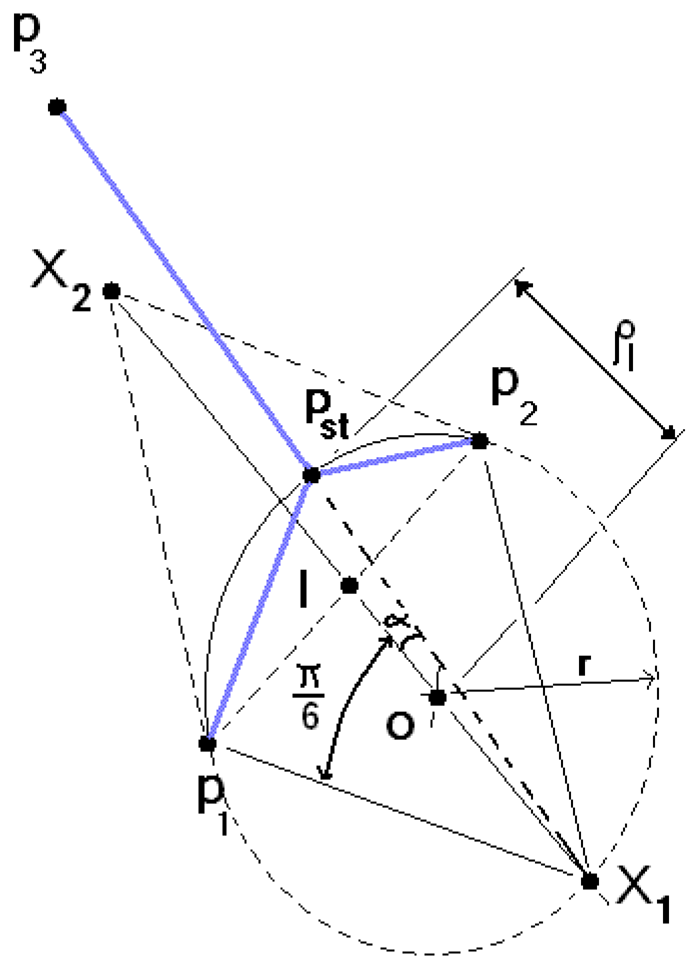
d) <u>Distance minimale de voisinage:</u>

Soit un système $\sum_s$ de s points $p_1, p_2, ..., p_s$ de l'espace vectoriel V_n noté $\sum_s = \{p_1, p_2, ..., p_s)$ avec $p_x \in \sum_s$ tel que $p_x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, n vecteurs de V_n.

La distance minimale de voisinage D_{min_V} est telle qu'il existe pour chaque point du système, il existe au moins un point voisin se trouvant à une distance inférieure ou égale à D_{min_V} . En utilisant la définition du voisinage restreint, on a:

$$\forall p_x, p_x \in \sum_s, \mathrm{V}(p_x, D_{\min_V}) \neq \{\}$$

e) <u>Calcul des coordonnées d'un point de Steiner.</u>



Soient $p_1(x_1, y_1, z_1)$, $p_2(x_2, y_2, z_2)$ *et* $p_3(x_3, y_3, z_3)$ trois points de l'espace vectoriel V_n.

$x_i = (x_{p_1} + x_{p_2})/2 \quad y_i = (y_{p_1} + y_{p_2})/2$

$z_i = (z_{p_1} + z_{p_2})/2 \quad a = (x_{p_2} - x_{p_1})/d(p_1, p_2)$

$d = (x_{p_3} - x_{p_1})/d(p_1, p_3) \quad b = (y_{p_2} - y_{p_1})/d(p_1, p_2)$

$e = (y_{p_3} - y_{p_1})/d(p_1, p_3) \quad c = (z_{p_2} - z_{p_1})/d(p_1, p_2)$

$f = (z_{p_3} - z_{p_1})/d(p_1, p_3)$

$\alpha = ((b * f) - (c * e)) \quad \beta = ((c * d) - (a * f)) \quad \gamma = ((a * e) - (b * d))$

$\mathrm{m}_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$

$\alpha' = \alpha / m_1 \quad \beta' = \beta / m_1 \quad \gamma' = \gamma / m_1$

$m_2 = d(p_1, p_2)/2 \quad a = (x_i - x_{p_1})/m_2 \quad b = (y_i - y_{p_1})/m_2$

$c = (z_i - z_{p_1})/\mathrm{m}_2 \quad k = ((\beta' * c) - (b * \gamma'))$

$k_1 = ((a * \gamma') - (\alpha' * c)) \quad k_2 = ((\alpha' * b) - (a' * \beta'))$

$\mathrm{m}_3 = \sqrt{k^2 + k_1{}^2 + k_2{}^2}$

$\alpha' = k / \mathrm{m}_3 \quad \beta' = k_1 / \mathrm{m}_3 \quad \gamma' = k_2 / \mathrm{m}_3$

$g = (\sqrt{3} * d(p_1, p_2))/2$

$x_{c_1} = (g * \alpha') + x_i \quad y_{c_1} = (g * \beta') + y_i \quad z_{c_1} = (g * \gamma') + z_i$

$x_{c_2} = (-g * \alpha') + x_i \quad y_{c_2} = (-g * \beta') + y_i \quad z_{c_2} = (-g * \gamma') + z_i$

$x_O = x_i \quad y_O = y_i \quad z_O = z_i$

1er cas : $d(C_1, p_3) < d(C_2, p_3)$ ou $\square C_1, O, p_3 > \dfrac{\pi}{2}$

g=g*(-1) $\quad X_X = x_{C_2} \quad Y_X = y_{C_2} \quad Z_X = z_{C_2}$

$x_{C_1} = X_X \quad y_{C_1} = Y_X \quad z_{C_1} = Z_X$

2ème cas: $d(C_1, p_3) \geq d(C_2, p_3)$ ou $\square C_1, O, p_3 \leq \dfrac{\pi}{2}$

$X_X = x_{C_1} \quad Y_X = y_{C_1} \quad Z_X = z_{C_1}$

$$\rho_{C_1} = \sqrt{x_{C_1}^{\ 2} + y_{C_1}^{\ 2} + z_{C_1}^{\ 2}}$$

$$\theta_{C_1} = \mathrm{Acn}(z_{C_1} / \rho_{C_1}) \quad \varphi_{C_1} = \mathrm{Acn}(x_{C_1} /(\rho_{C_1} * \mathrm{Sin}(\theta_{C_1})))$$

$$\mathrm{Si}\ (y_{C_1} < 0) \Rightarrow \varphi_{C_1} = (2\pi) - \varphi_{C_1}$$

$$\rho_X = \rho_{C_1} \quad \theta_X = \theta_{C_1} \quad \varphi_X = \varphi_{C_1}$$

$$g^{'} = g / 3$$

$$x_O = (g^{'} * \alpha) + x_i \quad y_O = (g^{'} * \beta) + y_i \quad z_O = (g^{'} * \gamma) + z_i$$

$$\rho_O = \sqrt{x_0^{\ 2} + y_O^{\ 2} + z_O^{\ 2}} \quad \theta_{\mathrm{O}} = \mathrm{Acn}(z_O / \rho_O) \quad \varphi_{\mathrm{O}} = \mathrm{Acn}(x_0 /(\rho_O * \mathrm{Sin}(\theta_{\mathrm{O}})))$$

$$\mathrm{Si}\ (y_O < 0) \Rightarrow \varphi_{\mathrm{O}} = (2\pi) - \varphi_{\mathrm{O}}$$

$$r = d(O, p_2)$$

$$m1 = d(p1, p2);$$
$$m2 = d\ (p1, p3);$$

$$Si\ (m1 > \varepsilon) \Rightarrow \alpha = k / m1$$
$$\beta = k1 / m1$$
$$\gamma = k2 / m1$$

$$g = (\sqrt{3} * d(p1, p2)) / 2$$

$$Soient\ \overline{\mathrm{X}}\,(x^{''}, y^{''}, z^{''})\ et\ \overline{\overline{\mathrm{X}}}\,(x^{'''}, y^{'''}, z^{'''})\ avec:$$

$$x^{''} = (g * \alpha) + xi$$
$$y^{''} = (g * \beta) + yi$$
$$z^{''} = (g * \gamma) + zi$$

$$et:$$

$$x^{'''} = (-g * \alpha) + xi$$
$$y^{'''} = (-g * \beta) + yi$$
$$z^{'''} = (-g * \gamma) + zi$$

Le point X doit être éloigné du point p3.

Si ((d ($\overline{\mathrm{X}}$,p3)< d ($\overline{\overline{\mathrm{X}}}$,p3)) ou ($\overset{\square}{\mathrm{X}}$,I,p3 > $\frac{\pi}{2}$)) $\Rightarrow$ g:=-g ; X= $\overline{\overline{\mathrm{X}}}$

Si ((d ($\overline{\mathrm{X}}$,p3)> d ($\overline{\overline{\mathrm{X}}}$,p3)) et ($\overset{\square}{\mathrm{X}}$,I,p3 < $\frac{\pi}{2}$)) $\Rightarrow$ X= $\overline{\mathrm{X}}$

$\rho_X = \rho(X)$; $\theta_X = \theta(X)$; $\varphi_X = \varphi(X)$

g=g/3 ; Soit $O(X_O, Y_O, Z_O)$ avec:

$X_O = (g*\alpha)+xi$; $Y_O = (g*\beta)+yi$; $Z_O = (g*\gamma)+zi$;

$\rho_O = \rho(O) : \theta_O = \theta(O)$; $\varphi_O = \varphi(O)$

$r = d\ (O, p2)$

Le point p_3 doit se situer à l'extérieur du cercle de rayon r centré sur O.

Si (d (p3,O)<r) et ($\boxed{X}$,O,p3 $< \frac{\pi}{6}$) $\Rightarrow$ $a=\sqrt{(x_{p_3}-x_X)} + \sqrt{(y_{p_3}-y_X)} + \sqrt{(z_{p_3}-z_X)}$

$b=2*((x_X*x_{p_{''}})+(y_X*y_{p_3})+(z_X*z_{p_3})-(\sqrt{x_X}+\sqrt{y_X}+\sqrt{z_X})+$

$(x_O*(x_X-x_{p_3}))+(y_O*(y_X-y_{p_3}))+(z_O*(z_X-z_{p_3})))$

$c=(\sqrt{x_X}+\sqrt{y_X}+\sqrt{z_X})+\sqrt{z_X}+(\sqrt{x_O}+\sqrt{y_O}+\sqrt{z_O})-$

$(2*((x_X*x_O)+(y_X*y_O)+(z_X*z_O)))-\sqrt{r}$

$\lambda=\sqrt{b}-(4*a*c)$

$Si\ (\lambda > 0) \Rightarrow g = (-b - \sqrt{\lambda})/(2*a)$

$x_{pst} = (g*(x_{p_{33}} - x_X)) + Xx$

$y_{pst} = (g*(y_{p_3} - y_X)) + Yx$

$z_{pst} = (g*(z_{p_3} - z_X)) + Zx$

Vérification: l*e po*int *de Steiner doit se trouver entre p*1 *et p*2.

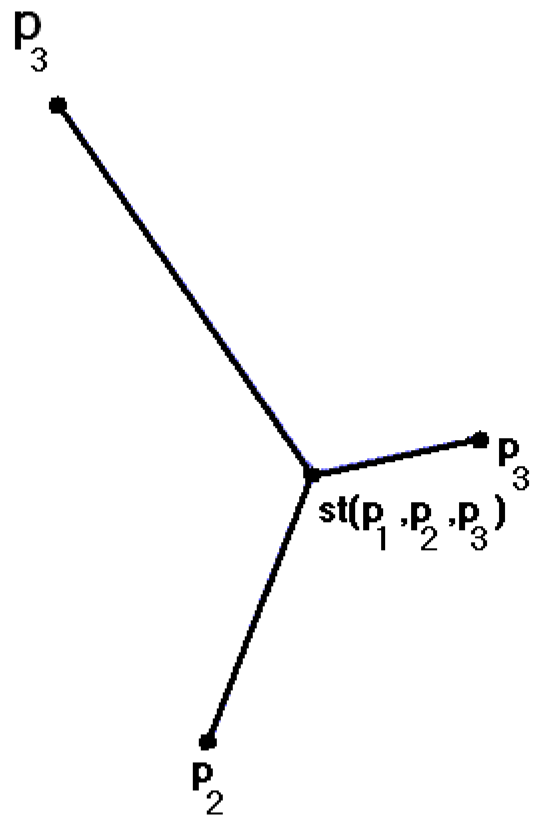
$Si\ (d\ (Pst, X) < d\ (p1, p2)) \Rightarrow g = (-b + \sqrt{\lambda})/(2*a)$

$x_{pst} = (g*(x_{p_{33}} - x_X)) + x_X$

$y_{pst} = (g*(y_{p_3} - y_X)) + y_X$

$z_{pst} = (g*(z_{p_3} - z_X)) + z_X$

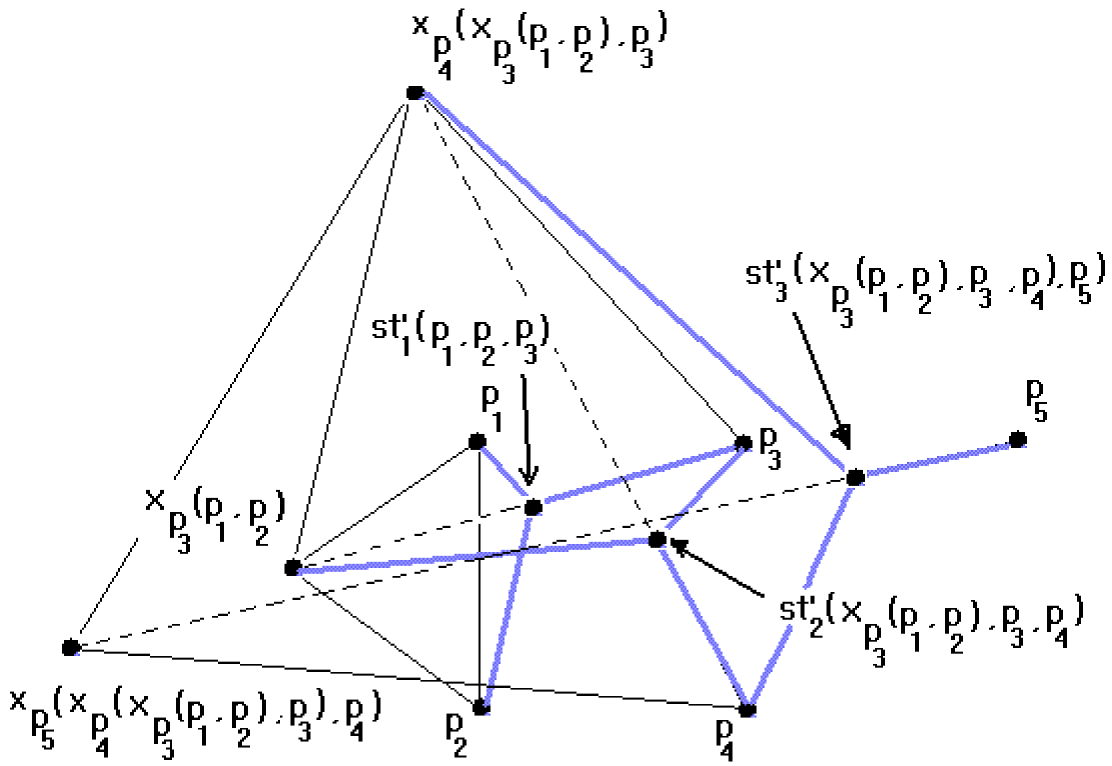
f) <u>Construction d'un groupe d'ordre 3.</u>



Le point de Steiner reliant les points p_1, p_2 *et* p_3 est noté: $st(p_1, p_2, p_3)$.
On commencera la construction d'un groupe G_3 par la détermination des points p_1, p_2 *et* p_3 tels que $p_2 = V(p_1, \mathrm{u})$ *et* $p_3 = V(p_1, u)$ avec $G_3 = \{p_1, p_2, p_3)$ *et* $S_1 = \{st_1(p_1, p_2, p_3)\}$
Un tel groupe correspond à un arbre de Steiner noté $\mathcal{A}(G_3, S_1)$.

g) Construction d'un groupe d'ordre supérieur à 3.

Pour tracer le point $st(p_1, p_2, p_3)$, il a fallu déterminer auparavant le point $X(p_1, p_2)$ (voir §e) Calcul des coordonnées d'un point de Steiner).



La figure ci-dessus représente les étapes successives de la construction d'un groupe successivement d'ordre 3, 4 et 5.

A l'ordre 4, on a déterminé les points:

$st'_2(X_{p_3}(p_1,p_2),p_3,p_4)$ *et* $X_{p_4}(X_{p_3}(p_1,p_2),p_3)$

A l'ordre 5, on a déterminé les points:

$st'_3(X_{p_3}(p_1,p_2),p_3,p_4,p_5)$ *et* $X_{p_5}(X_{p_4}(X_{p_3}(p_1,p_2),p_3),p_4)$

Par récurrence, il vient au rang r, les points:

$$\chi_{r_{(r>2)}} = X(\chi_{r-1},p_{r-1}) \text{ avec } \chi_2 = p_1 \text{ et } st'_{r-2_{(r>2)}}(\chi_{r-1},p_{r-1},p_r)$$

h) <u>Points de Steiner transitoires.</u>

Les points st' sont des points de Steiner transitoires. Ils doivent être ajustés pour obtenir un arbre de Steiner satisfaisant la condition portée sur sa longueur minimale pour les r points du groupe. Il reste à relier les r-2 points de Steiner entre eux. Cependant, les points de la forme χ_{r-1} représentent la position moyenne des deux derniers points introduits dans le groupe à l'ordre r, d'où une erreur récurrente si l'on ne modifie pas les positions des χ_{r-2} points de Steiner transitoires. C'est le rôle de la rétro-propagation des calculs.

i) <u>Rétro-propagation des calculs.</u>

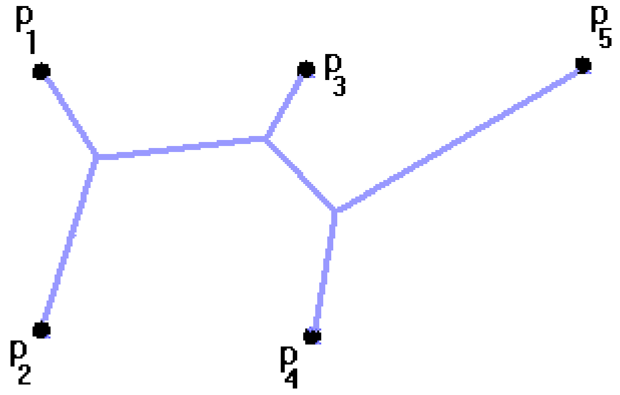
Pour un groupe définitif G_k, on a:

$st_{k-2}(\chi_{k-1}, p_{k-1}, p_k) = st'_{k-2}(\chi_{k-1}, p_{k-1}, p_k)$

On calculera alors les nouveaux points de Steiner ajustés
$st_i(\chi_{i+1}, p_{i+1}, st'_{i+1})$ *avec* $\chi_{i+1} = X_{i+1}(\chi_i, p_i)$ *pour* $i \geq 1$ *et* $\chi_2 = p_1$

j) Points de Steiner définitifs .

Les points de Steiner définitifs auront la forme: $st_i(\chi_{i+1}, p_{i+1}, st'_{i+1})$
pour obtenir un réseau de longueur minimale:



remarque: pour un groupe G_k, l'arbre $\mathcal{A}$ aura (2k-3) branches.

2.7 a) Longueur minimale.

a.1 Longueur minimale d'un arbre simple.

Soit un arbre de Steiner défini par $\mathcal{A}(G_2, S_0)$ avec $G = \{p_1, p_2\}$. La longueur de l'arbre $\mathcal{A}$, notée $L_{\min}(\mathcal{A})$ est définie comme suivant:

$L_{\min}(\mathcal{A}) = d_E(p_1, p_2)$ Rappel: $S_0 = \{\}$

a.2 Longueur minimale d'un arbre complexe.

Soit un arbre de Steiner défini par $\mathcal{A}(G_k, S_{k-2})$.La longueur de l'arbre $\mathcal{A}$, notée $L_{\min}(\mathcal{A})$ est définie comme suivant:

$$L_{\min}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{k-2} d_E(st_i, st_{i+1}) + \sum_{i=2}^{k-2} d_E(p_i, st_{i-1}) + d_E(p_1, st_1) + d_E(p_k, st_{k-2})$$

b) Longueur directe d'un arbre.

La longueur directe d'un arbre $\mathcal{A}(G_k, S_{k-2})$ notée $L_{dir}(\mathcal{A})$ est la longueur des points de G_k connectés deux à deux avec leur voisin le plus proche, diminuée de la plus grande longueur consécutive trouvée.

Soit l'arbre $\mathcal{A}(G_k, S_{k-2})$ avec $G_k = \{p_1, p_2, ..., p_{k-1}, p_k\}$.

$L_{dir}(\mathcal{A})=$

$$\sum_{i=1}^{k-2} d(p_i, p_{i+2}) + d(p_1, p_2) + d(p_{k-1}, p_k) - Max(\sum_{i=1}^{k-2} d(p_i, p_{i+2}), d(p_1, p_2), d(p_{k-1}, p_k))$$

Remarque: lorsque k=2, $L_{dir}(\mathcal{A}) = L_{\min}(\mathcal{A})$

2.8 a) Rapport de Steiner.

Le rapport de Steiner d'un arbre $\mathcal{A}(G_k, S_{k-2})$ est défini par le quotient de la longueur minimale du groupe G_k à sa longueur directe.

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \frac{L_{\min}(A)}{L_{dir}(A)}$$

b) Densité linéique Définition.

$\mathcal{R}(\mathcal{A})$ exprime la densité des branches de l'arbre $\mathcal{A}$ qui traverse l'espace recouvert par G_k. Ces branches étant des segments de droite, $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ est aussi appelé densité linéique de l'arbre $\mathcal{A}$. Cette valeur doit être minimale pour obtenir un réseau de Steiner.

c) Etude de $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}) = \frac{L_{\min}(A)}{L_{dir}(A)}$$

i) Premier cas: k=2 $\Rightarrow$ $L_{dir}(\mathcal{A}) = L_{\min}(\mathcal{A})$ $\Rightarrow$ $\mathcal{R}(\mathcal{A})=1$

conséquence: dans un arbre simple, seule la longueur directe de cet arbre sert à évaluer sa minimalité.

ii) Deuxième cas: k>2 (cas d'un arbre complexe)

On a: $\mathcal{A}(G_k, S_{k-2})$

La longueur minimale de $\mathcal{A}$ est proportionnelle à (2k-3), ce qui s'écrit:

$L_{\min}(\mathcal{A})$=a. (2k-3)

De même, la longueur directe de $\mathcal{A}$ est proportionnelle à Ord(G_k)-1, ce qui s'écrit:

$L_{dir}(\mathcal{A})$=b.(k-1)

d'où:

$$\mathcal{R}(\mathcal{A})=\frac{L_{\min}(A)}{L_{dir}(A)}=\frac{a.(2k-3)}{b.(k-1)}\ avec\ k \geq 2$$

$$k \geq 2 \Rightarrow 2ak \,\square\, 3a\ ; b.k \,\square\, b\ et\ \lim_{k\to\infty}(\mathcal{R}(\mathcal{A}))=\frac{2a}{b}$$

La conjecture de Steiner stipule que $\mathcal{R}(\mathcal{A})\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui revient à dire que

min($\mathcal{R}(\mathcal{A})$)= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ et\ a=\frac{b\sqrt{3}}{4}\ ou\ b=\frac{4a}{\sqrt{3}}$$

d) Critère de choix sur $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

L'algorithme doit répondre à deux contraintes antagonistes:

i) Obtenir le plus tôt possible des arbres complexes afin de réduire le temps de calcul.

ii) Rechercher pour chaque sous-arbre $\mathcal{A}$ une valeur minimale de $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Stratégie de résolution:

L'algorithme sélectionne au fur et à mesure des recherches de points voisins, le sous-arbre satisfaisant à ces deux contraintes avant d'ajouter le dernier sous-arbre retenu au réseau déjà construit.

3. Les réseaux de Steiner.

3.1 a) Définition.

Un réseau de Steiner de longueur minimale est formé de l'ensemble $\mathcal{T}$ des t arbres de Steiner minimaux $\{A^1, A^2, ..., A^t\}$ avec A^k *défini pour* $1 < k < t$ *par* :

$$A^k(G_o^k, s_{o-2}^k)\ et\ Ord(G^1 \oplus G^2 \oplus ... \oplus G^t) = n$$

b) Degré d'un réseau.

Le degré d'un réseau est donné par le nombre de sous-arbres de Steiner minimaux qui le composent: $\mathcal{T}_{(n,t)} = \{A^1, A^2, ..., A^t\}$

3.2 a) <u>Réseau singulier.</u>

Un réseau de Steiner singulier à n points est un réseau de degré 1.

$$\tau_{(n,1)} = \{A^1\}$$

b) <u>Réseau composé .</u>

Un réseau de Steiner composé à n points est un réseau de degré strictement supérieur à 1. $\tau_{(n,t)} = \{A^1, A^2, ..., A^t\}$